Klassenarbeit Nr. 2

1. Bestimme die Ableitungsfunktion.

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

b) $f(t) = \sqrt[5]{t}$ $f'(t) = \frac{1}{5} \cdot t^{-\frac{4}{5}}$

c) $h(x) = 0{,}25x^4 - x^3$ $h'(x) = x^3 - 3x^2$

d) $g(t) = \frac{2}{3}t^3 - 4t^{-2}$ $g'(t) = 2t^2 + 8t^{-3}$

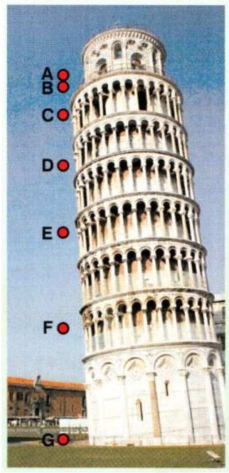
2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^2$.

a) Berechne die Ableitung f ‘mithilfe einer von zwei rechnerischen Methoden an der Stelle $x_0 = 3$.

$f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^2 - 2 \cdot 9}{x - 3} = \lim \frac{2(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim 2x + 6 = 12$

b) Der Punkt P (1 | f(1)) liegt auf dem Graphen von f. Gib die Gleichung der Tangente durch P an.

$f'(1) = 4$ $P(1|2) \Rightarrow y = 4(x-1) + 2 = 4x - 2$



3. Bereits Galileo Galilei (1564-1642) untersuchte, angeblich am schiefen Turm von Pisa, den freien Fall von Gegenständen. Lässt man von der Aussichtsplattform einen Stein herunterfallen und misst dabei für verschiedene Zeitpunkte die Höhe über dem Boden, ergibt sich folgende Messtabelle:

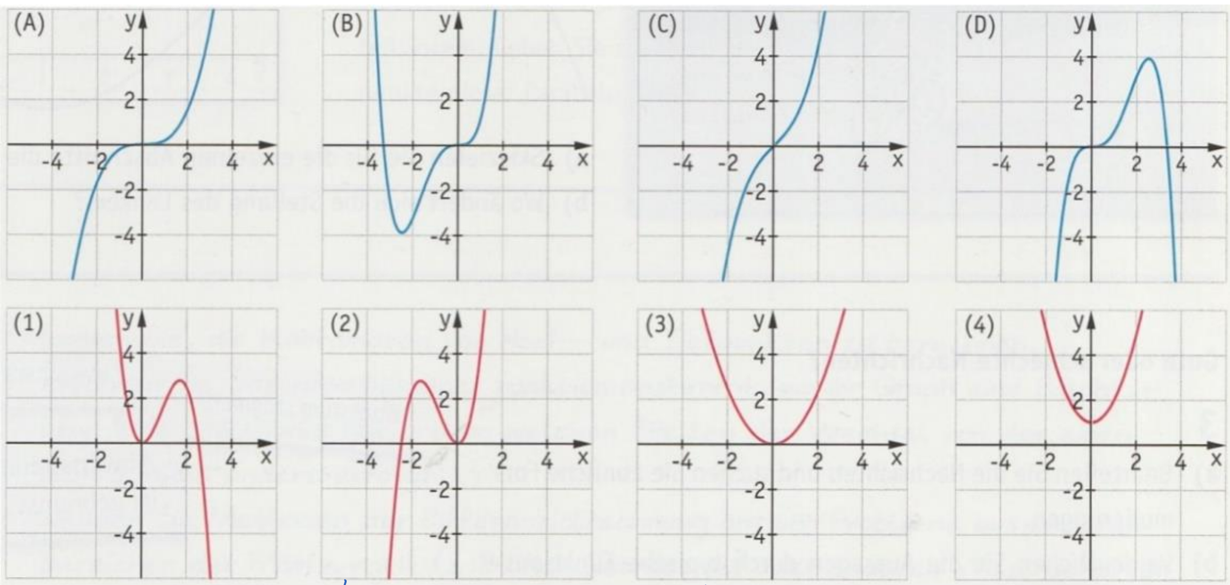
	A	B	C	D	E	F	G
Zeit t in s	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Höhe in m	45	43,8	40	33,8	25	13,8	0

Bestimme *rechnerisch* die mittlere Fallgeschwindigkeit im Intervall $[0s\,;2s]$ sowie im Intervall$[1{,}5s\,;2{,}5s]$.

$m_1 = \frac{25 - 45}{2 - 0} = -\frac{20}{2}\frac{m}{s} = -10\frac{m}{s}$

$m_2 = \frac{13{,}8 - 33{,}8}{1} = -20\frac{m}{s}$

4. Ordne den Graphen (A), (B), (C) und (D) die Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktionen (1), (2), (3) und (4) zu. Begründe deine Entscheidung.



A → 3, da $f'(0) = 0$ und VZW von f'

B → 2, da f' eine DNST bei $x = 0$

C → 4, da f monoton steigend ist

D → 1, da f Extr. bei $x = 0$ und $x \approx 2{,}4$

5. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$

a) In welchen Punkten hat der Graph von f eine waagrechte Tangente?

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \; x_2 = 2$

$P_1(0|0), \; P_2(2|-4)$

b) Bestimme den Punkt des Graphen dessen Tangente parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -3x + 5$ verläuft.

$f'(x) = -3 \Rightarrow 3x^2 - 6x = -3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$P(1|-2)$

c) Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graphe von f im Punkt A(1 |f(1))

$f'(1) = -3, \; A = (1|-2) \Rightarrow n: \; y = \frac{1}{3}(x-1) - 2 = \frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}$

6. Das Profil einer Böschung wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ beschrieben. (x in Meter und die Höhe der Böschung auch in Meter)

a) Bestimme die Steigung und den Steigungswinkel der Sekanten durch die Punkte A(1|f(1)) und B(2|f(2)

$A(1|1), \; B(2|\sqrt{2}) \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}-1}{1} \approx 0{,}414 \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}414 \Rightarrow \alpha = 22{,}49°$

b) An die Böschung wird eine Rampe mit Steigungswinkel 14° gebaut, die im Punkt A an der Böschung endet. Begründe, dass diese Rampe nicht knickfrei an der Böschung endet. Wo beginnt diese Rampe und wie lang wird sie?

$\tan 14° = 0{,}25 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + c \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + c \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \quad N(-3|0)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

ist $\neq 0{,}25$ ✓

$l = \sqrt{4^2 + 1^2} = 4{,}123$ m

c) An die Böschung soll eine Rampe mit 14° Steigung knickfrei angebaut werden. Wo beginnt die Rampe an der Böschung und wie lang wird sie?

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$ und $B(4|2) \Rightarrow y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1 \quad N(-4|0)$

$l = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8{,}246$ m

Viel Erfolg!!!